

Научная статья

УДК 639.2.053.7

DOI: 10.26428/1606-9919-2022-202-601-622

EDN: FWGTMH



О ПРИМЕНЕНИИ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА В КОГОРТНЫХ МОДЕЛЯХ

О.И. Ильин*

Камчатский филиал ВНИРО (КамчатНИРО),
683000, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Набережная, 18

Аннотация. На примере восточнокамчатского минтая рассматривается один из возможных подходов к оценке состояния запасов морских промысловых гидробионтов по данным о возрастной структуре уловов. Представлены алгоритмы субоптимальной фильтрации и интерполяции (сглаживающий расширенный фильтр Калмана и сглаживающий сигма-точечный фильтр Калмана) для когортной модели эксплуатируемого запаса при наличии неопределенности относительно истинного значения вектора параметров системы.

Ключевые слова: оценка запасов, когортная модель, фильтр Калмана, восточнокамчатский минтай

Для цитирования: Ильин О.И. О применении фильтров Калмана в когортных моделях // Изв. ТИНРО. — 2022. — Т. 202, вып. 3. — С. 601–622. DOI: 10.26428/1606-9919-2022-202-601-622. EDN: FWGTMH.

Original article

On application of Kalman filters in cohort models

Oleg I. Ilin

Kamchatka branch of VNIRO (KamchatNIRO),
18, Naberezhnaya Street, Petropavlovsk-Kamchatsky, 683000, Russia
Ph.D., leading researcher, ilin.o.i@kamniro.ru, ORCID 0000-0003-3581-5333

Abstract. On example of walleye pollock at East Kamchatka, one of possible approaches is considered to assess the state of stocks for marine commercial species with usage of the data on age structure in catches. Algorithms for suboptimal filtering and interpolation (extended Kalman smoother and unscented Kalman smoother) are presented for a cohort model of an exploited stock, in presence of uncertainty about true value of the vector of the system parameters.

Keywords: stock assessment, cohort model, Kalman filter, East Kamchatka, walleye pollock

For citation: Ilin O.I. On application of Kalman filters in cohort models, *Izv. Tikhookean. Nauchno-Issled. Inst. Rybn. Khoz. Okeanogr.*, 2022, vol. 202, no. 3, pp. 601–622. (In Russ.). DOI: 10.26428/1606-9919-2022-202-601-622. EDN: FWGTMH.

* Ильин Олег Игоревич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, *ilin.o.i@kamniro.ru*, ORCID 0000-0003-3581-5333.

Введение

Методы оценки запасов, основанные на представлении популяции в виде совокупности отдельных поколений (когорт), численность каждого из которых убывает во времени под воздействием промысла и от естественных причин, принято называть когортными. С 60-х гг. прошлого века они широко используются для оценки запасов промысловых гидробионтов по всему миру. Сначала были разработаны детерминистские модели [Gulland, 1969; Pope, 1972; Pope, Shepherd, 1982; Laurec, Shepherd, 1983], основанные на анализе виртуальной популяции. С 1980-х гг. развитие когортных методов шло в направлении статистических методов и настроечных процедур, в которых используется и модель динамики популяции, и модель ошибки наблюдений [Doubleday, 1976; Fournier and Archibald, 1982; Deriso et al., 1985; Methot, 1990; Patterson, 1994; McAllister, Ianelli, 1997; Fournier et al., 1998; Hilborn et al., 2000; Bull et al., 2012; Methot, Wetzel, 2013]. Из отечественных разработок выделяется оригинальный метод «ISVPA» Д.А. Васильева [Vasilyev, Kizner, 1997]. С развитием статистических методов стало возможным привлечение для оценки запасов различной дополнительной информации — данных промысловой статистики и съемок, результатов мечения, индексов численности и зависимости «запас–пополнение», — а также учет корреляций и избыточной дисперсии, присущих данным по возрастному (размерному) составу [Aanes, Pennington, 2003; Hrafnkelsson, Stefánsson, 2004; Francis, 2014]. Полнота оценок эксплуатируемых запасов и количество используемых источников данных продолжают расти [Maunder, Punt, 2013].

Когортные модели, которые учитывают как ошибки наблюдения в данных, используемых для оценки параметров модели, так и ошибки процесса в уравнениях динамики запаса, все чаще используются в рыбохозяйственной науке. Такие модели обычно называют моделями в пространстве состояний, поскольку они сочетают в себе стохастические предположения как о наблюдаемых величинах, так и о ненаблюдаемых состояниях изучаемой динамической системы (например, рыбного запаса). Подход моделирования в пространстве состояний на основе данных об уловах по возрастам был введен Гудмундссоном [Gudmundsson, 1994]. В последнее время интерес к нему возрастает [Gudmundsson, Gunnlaugsson, 2012; Berg et al., 2013; Nielsen, Berg, 2014; Ильин и др., 2016; Berg, Nielsen, 2016; Cadigan, 2016; Perreault et al., 2020; Nielsen et al., 2021]. Связано это, в том числе, и с разработкой сложных программных пакетов (ADMB, TMB), которые могут эффективно оценивать состояние и параметры модели в пространстве состояний [Fournier et al., 2012; Kristensen et al., 2016]. Сегодня становится очевидным, что модели в пространстве состояний являются лучшими для практики оценки рыбных запасов.

В работе Гудмундссона и Гуннлаугссона [Gudmundsson, Gunnlaugsson, 2012] показано, что методы, основанные на аппроксимации Лапласа для маргинального распределения, реализованные в пакетах ADMB, TMB, и расширенный фильтр Калмана обеспечивают приближение к истинной функции правдоподобия и, в общем, дают смещенные оценки параметров и переменных состояния для когортных моделей. Степень смещения зависит от модели, но это смещение значительно меньше среднеквадратической ошибки модели (RMSE). При этом оценки и разброс параметров и переменных состояния, полученные с помощью двух указанных подходов, мало различаются. В обзорной статье Эберхарда [Aeberhard et al., 2018] отмечается, что запуск MCMC (Markov chain Monte Carlo) процедур с неинформативными априорными распределениями дает апостериорные распределения, моды которых согласуются с точечными оценками, которые получены методами, основанными на аппроксимации Лапласа и реализованными в пакете TMB.

Для моделей в пространстве состояний эффективным рекурсивным алгоритмом оценивания ненаблюдаемого состояния системы в реальном времени является фильтр Калмана. Непосредственная задача калмановской фильтрации состоит в том, чтобы найти несмещенную оценку вектора состояния системы, являющуюся функцией измерений и минимизирующую дисперсию ошибки оценивания.

Основным методом практического решения задач нелинейной фильтрации вплоть до середины 90-х гг. прошлого века являлся так называемый обобщенный фильтр Калмана [Сейдж, Мелс, 1976]. Он основан на разложении нелинейной переходной функции в ряд Тейлора в окрестности оптимальной оценки неизвестного вектора состояния на каждом шаге алгоритма. Таким образом, обобщенный фильтр Калмана обеспечивает первый порядок аппроксимации математического ожидания и матрицы ковариации неизвестного вектора состояния системы. Из современных методов нелинейной калмановской фильтрации выделяется впервые предложенный в 1995 г. сигма-точечный фильтр Калмана [Julier et al., 1995]. На каждом этапе его алгоритма вокруг оценки вектора состояния выбирается набор сигма-точек, используемых затем для аппроксимации первых двух моментов распределения случайного вектора состояния системы. В отличие от обобщенного фильтра Калмана, в сигма-точечном фильтре нелинейная функция не линеаризуется, и он не требует вычисления матриц Якоби. Доказано, что для достаточно гладких функций системы сигма-точечный фильтр Калмана обеспечивает второй порядок аппроксимации математического ожидания неизвестного вектора состояния.

Целью настоящей работы является, во-первых, практическая оценка точности двух алгоритмов субоптимальной фильтрации и интерполяции (сглаживающий расширенный фильтр Калмана и сглаживающий сигма-точечный фильтр Калмана) на задачах оценки состояния запасов морских промысловых гидробионтов по данным о возрастной структуре уловов, а во-вторых, применение сглаживающего сигма-точечного фильтра Калмана для оценки запасов и популяционных параметров восточнокамчатского минтая. Для этого была проведена серия численных экспериментов.

Материалы и методы

Рассматриваемая в настоящей работе стохастическая когортная модель имеет вид

$$\ln N_{t,1} = \ln N_{t-1,1} + \varepsilon_{t-1}^R, t = 1, \dots, n_y; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ln N_{t,a} &= \ln N_{t-1,a-1} - Z_{t-1,a-1} + \varepsilon_{t-1,a-1}^N, t = 1, \dots, n_y; a = 2, \dots, n_a; \\ Z_{t,a} &= F_{t,a} + M_{t,a}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$F_{t,a} = F_t \cdot s_{t,a}, t = 0, \dots, n_y; a = 1, \dots, n_a,$$

где $N_{t,a}$ — численность рыб; $Z_{t,a}$, $F_{t,a}$ и $M_{t,a}$ — мгновенные коэффициенты общей, промысловой и естественной смертности в возрасте a в год t ; ε_{1P}^R , ε_{2t}^N — нормально распределенные некоррелированные во времени (белые) шумы.

Коэффициенты интенсивности промысла F_t изменяются в соответствии с моделью гауссовского случайного блуждания:

$$\ln F_t = \ln F_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^F, t = 1, \dots, n_y, \quad (3)$$

где ε_t^F — белый шум. Коэффициент селективности $s_{t,a}$ имеет следующую функциональную форму:

$$s_{t,a} = s(a, r_{1t}, \dots, r_{n_s t}), t = 0, \dots, n_y; a = 1, \dots, n_a,$$

где s — достаточно гладкая функция; r_{kt} , $k = 1, \dots, n_s$ — некоторые изменяющиеся во времени параметры. Имеется ряд довольно часто используемых в когортных моделях «шаблонов» для коэффициентов селективности [см., например, Bull et al., 2012]. Логистическая функция селективности будет иметь вид

$$s_{t,a} = \frac{1}{1 + \exp(-r_{1t}(a - r_{2t}))}.$$

Для параметров r_{kt} , $k = 1, \dots, n_s$ используется модель гауссовского случайного блуждания:

$$\ln r_{kt} = \ln r_{k,t-1} + \varepsilon_{rk,t-1}, t = 1, \dots, n_y, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{rk,t}$ — нормально распределенные некоррелированные во времени белые шумы.

Уравнения наблюдения для уловов по возрастным группам $C_{t,a}$ и индексов запаса I_t^k , $k = 1, \dots, N_I$ записываются в виде

$$\ln C_{t,a} = \ln N_{t,a} + \ln F_{t,a} - \ln Z_{t,a} + \ln(1 - \exp(-Z_{t,a})) + \varepsilon_{t,a}^C, \\ t = 1, \dots, n_y; a = 1, \dots, n_a; \quad (5)$$

$$\ln I_t^k = \ln \left[q_k \sum_a (w_{t,a}^k N_{t,a} \exp(-\Delta_k Z_{t,a})) \right] + \varepsilon_t^{Ik}; t = 1, \dots, n_y, \quad (6)$$

где q_k — коэффициенты улавливаемости; $w_{t,a}^k$ — коэффициенты, характеризующие k -й индекс запаса I_t^k . Так, $w_{t,a}^k = m_{t,a}$, $m_{t,a} \rho_{t,a}$ или $m_{t,a} s_{t,a}$, если I_t^k — индекс биомассы соответственно общего, нерестового или промыслового запаса; Δ_k — доля года от его начала до времени проведения наблюдения I_t^k . Здесь $m_{t,a}$ обозначает массу рыб, а $\rho_{t,a}$ — долю зрелых рыб в возрасте a в год t . Для индекса численности с возрастной структурой используется следующее уравнение наблюдения:

$$\ln I_{t,a}^* = \ln Q_a + \ln N_{t,a} - \Delta Z_{t,a} + \varepsilon_{t,a}^{I*}; \\ t = 1, \dots, n_y; a = a_1, \dots, a_l; 1 \leq a_1 \leq a_l \leq n_a, \quad (7)$$

где Δ — доля от его начала до времени проведения наблюдения; Q_a — возрастные коэффициенты улавливаемости, зависящие от вектора подлежащих оценке параметров Θ_Q . Предполагается, что $\varepsilon_{t,a}^C$, ε_t^{Ik} , $\varepsilon_{t,a}^{I*}$ — нормально распределенные некоррелированные во времени шумы. Кроме этого, предполагается, что шумы процессов и наблюдений не коррелированы между собой.

Не может вызвать затруднений использование информации об уловах по возрастным группам для нескольких типов орудий лова или флотов и нескольких возрастных индексов [Nielsen et al., 2021]. При этом расширится вектор состояния (каждый флот имеет свою интенсивность промысла и параметры селективности) и вектор оцениваемых параметров. Здесь для упрощения записи используется один флот и один возрастной индекс численности.

Определим вектор состояния

$$X_t = [\ln N_{t,1}, \dots, \ln N_{t,n_a}, \ln F_t, \ln r_{1t}, \dots, \ln r_{n_s t}]^T$$

и вектор наблюдения

$$y_t = [\ln C_{t,1}, \dots, \ln C_{t,n_a}, \ln I_t^1, \dots, \ln I_t^{N_I}, \ln I_{t,a_1}^*, \dots, \ln I_{t,a_l}^*]^T.$$

Обозначим через N_x и N_y размерности векторов состояния X_t и наблюдения y_t . Тогда рассматриваемая нами когортная модель в пространстве состояний в эквивалентном матричном виде записывается следующим образом:

$$X_t = A_{t-1}(X_{t-1}) + \varepsilon_{t-1}^X; \quad (8)$$

$$y_t = B_t(X_t) + \varepsilon_t^Y, t = 1, \dots, n_y, \quad (9)$$

где A_t — переходная функция, которая представляет собой вектор-столбец, элементами которого являются функции от X_{t-1} , входящие в правые части уравнений (1)–(4), т.е.

$$A_{t-1} = \begin{bmatrix} X_{t-1,1} \\ X_{t-1,1} - Z_{t-1,1} \\ \dots \\ X_{t-1,n_a-1} - Z_{t-1,n_a-1} \\ X_{t-1,n_a+1} \\ \dots \\ X_{t-1,n_a+n_s+1} \end{bmatrix}, \varepsilon_t^X = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^R \\ \varepsilon_{t,1}^N \\ \dots \\ \varepsilon_{t,n_a-1}^N \\ \varepsilon_t^F \\ \varepsilon_{r1,t} \\ \dots \\ \varepsilon_{rn_s,t} \end{bmatrix}, \varepsilon_t^Y = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t,1}^C \\ \dots \\ \varepsilon_{t,n_a}^C \\ \varepsilon_t^{I1} \\ \dots \\ \varepsilon_t^{IN_I} \\ \varepsilon_{t,a_1}^{I*} \\ \dots \\ \varepsilon_{t,a_l}^{I*} \end{bmatrix};$$

$$B_t = \begin{bmatrix} \left. \begin{array}{c} X_{t,1} + X_{t,n_a+1} + \ln s_{t,1} - \ln Z_{t,1} + \ln(1 - \exp(-Z_{t,1})) \\ \dots \\ X_{t,n_a} + X_{t,n_a+1} + \ln s_{t,n_a} - \ln Z_{t,n_a} + \ln(1 - \exp(-Z_{t,n_a})) \end{array} \right\} n_a \\ \left. \begin{array}{c} \ln(q_1) + \ln\left(\sum_a w_{t,a}^1 \exp(X_{t,a}) \exp(-\Delta_1 Z_{t,1})\right) \\ \dots \\ \ln(q_{N_I}) + \ln\left(\sum_a w_{t,a}^{N_I} \exp(X_{t,a}) \exp(-\Delta_{N_I} Z_{t,1})\right) \end{array} \right\} N_I \\ \left. \begin{array}{c} \ln Q_1 + X_{t,1} - \Delta \quad Z_{t,1} \\ \dots \\ \ln Q_l + X_{t,l} - \Delta \quad Z_{t,l} \end{array} \right\} l \end{bmatrix},$$

где Z и s выражаются через элементы вектора состояния следующим образом:

$$Z_{t,a} = \exp(X_{t,n_a+1}) s_{t,a} + M_{t,a};$$

$$s_{t,a} = s(a, \exp(X_{t,n_a+2}), \dots, \exp(X_{t,n_a+n_s+1})).$$

Относительно шумов процесса ε_{t-1}^X и наблюдения ε_t^Y будем также предполагать, что их ковариационные матрицы $v_{x_{t-1}}$ и v_{y_t} положительно определены.

Вектор параметров θ в общем случае включает в себя коэффициенты улавливаемости q_k , $k = 1, \dots, N_p$, вектор параметров Θ_Q , определяющий возрастные коэффициенты улавливаемости, параметры распределений шумов процесса и наблюдения, а также, возможно, параметры, определяющие начальные оценку и ковариацию вектора состояния. Кроме того, в общем случае, функция перехода A_t также может зависеть от некоторых подлежащих оценке параметров. Для уменьшения размерности вектора θ коэффициенты q_k и Θ_Q можно включить в расширенный вектор состояния, при этом отвечающие им элементы ковариационной матрицы шума процесса принять равными нулю.

Сфокусируемся на задаче оценки вектора состояния в условиях неопределенности относительно действительного значения вектора параметров в системе (8) и наблюдениях (9). В теории дискретной субоптимальной фильтрации используются замкнутые уравнения для среднеквадратической оценки фильтрации $X_{t|t}(\theta) = E(x_t | Y_t, \theta)$ и ковариационной матрицы погрешности оценивания состояния $R_{t|t}(\theta)$. Фильтрационную плотность $p(x_t | Y_t, \theta)$ будем аппроксимировать нормальной плотностью $N(X_{t|t}(\theta), R_{t|t}(\theta))$. Уравнения расширенного фильтра Калмана (ЕКФ) в форме «предиктор-корректор» при фиксированном векторе оцениваемых параметров θ имеют вид [Сейдж, Мелс, 1976]:

предиктор:

$$X_{t|t-1}(\theta) = A_{t-1}(X_{t-1|t-1}(\theta));$$

$$R_{t|t-1}(\theta) = L_{t-1} R_{t-1|t-1}(\theta) L_{t-1}^T + v_{x_{t-1}};$$

$$L_t = \|l_{kj}^t\|, l_{kj}^t = \frac{\partial A_{t,k}}{\partial X_{t,j}} \Big|_{X_t = X_{t-1|t-1}(\theta)};$$

корректор:

$$X_{t|t}(\theta) = X_{t|t-1}(\theta) + \beta_t [y_t - B_t(X_{t|t-1}(\theta))];$$

$$R_{t|t}(\theta) = (I - \beta_t H_t) R_{t|t-1}(\theta);$$

$$\beta_t = R_{t|t-1}(\theta) H_t^T [H_t R_{t|t-1}(\theta) H_t^T + v_{y_t}]^{-1};$$

$$H_t = \|h_{kj}^t\|, h_{kj}^t = \frac{\partial B_{t,k}}{\partial X_{t,j}} \Big|_{X_t = X_{t|t-1}(\theta)},$$

где $R_{t|t-1}(\theta)$ — ковариационная матрица прогноза $X_{t|t-1}(\theta) = E(x_t | Y_{t-1}, \theta)$; $R_{t|t}(\theta) = R_t(\theta)$ — матрица, аппроксимирующая ковариационную матрицу оценок $X_{t|t}(\theta)$ при фиксированном θ .

Уравнения сигма-точечного фильтра Калмана (UKF) при фиксированном векторе оцениваемых параметров θ имеют вид:

предиктор:

$$\begin{aligned} X_{t|t-1}(\theta) &= \sum_{k=0}^{2N_x} \omega_k A_{t-1}(\chi_{t-1|t-1}^k), \chi_{t-1|t-1}^0 = X_{t-1|t-1}(\theta); \\ \chi_{t-1|t-1}^k &= X_{t-1|t-1}(\theta) + \sqrt{N_x + \lambda} [S_{t-1|t-1}(\theta)]^k, k = 1, \dots, N_x; \\ \chi_{t-1|t-1}^k &= X_{t-1|t-1}(\theta) - \sqrt{N_x + \lambda} [S_{t-1|t-1}(\theta)]^{k-N_x}, k = N_x + 1, \dots, 2N_x; \\ \omega_0 &= \frac{\lambda}{N_x + \lambda}; \quad \omega_k = \frac{1}{2(N_x + \lambda)}; \\ R_{t|t-1}(\theta) &= \sum_{k=0}^{2N_x} \bar{\omega}_k (A_{t-1}(\chi_{t-1|t-1}^k) - X_{t|t-1}(\theta)) \times \\ &\quad \times (A_{t-1}(\chi_{t-1|t-1}^k) - X_{t|t-1}(\theta))^T + v_{xt-1}; \\ \bar{\omega}_0 &= \omega_0 + 1 - \alpha^2 + \beta; \quad \bar{\omega}_k = \omega_k, \end{aligned}$$

где $\chi_{t-1|t-1}^k, k = 0, \dots, 2N_x$ — набор сигма-точек; ω_k и $\bar{\omega}_k$ — соответствующие им веса, $[S_{t-1|t-1}(\theta)]^k$ — k -й столбец нижней треугольной матрицы $S_{t-1|t-1}(\theta)$ в разложении Холецкого $R_{t-1|t-1}(\theta) = S_{t-1|t-1}(\theta) S_{t-1|t-1}^T(\theta)$, и корректор:

$$\begin{aligned} X_{t|t}(\theta) &= X_{t|t-1}(\theta) + \beta_t (y_t - \hat{Y}_{t|t-1}), \hat{Y}_{t|t-1} = \sum_{k=0}^{2N_x} \omega_k B_t(\chi_{t|t-1}^k); \\ \chi_{t|t-1}^0 &= X_{t|t-1}(\theta); \quad \chi_{t|t-1}^k = X_{t|t-1}(\theta) + \sqrt{N_x + \lambda} [S_{t|t-1}(\theta)]^k, k = 1, \dots, N_x; \\ \chi_{t|t-1}^k &= X_{t|t-1}(\theta) - \sqrt{N_x + \lambda} [S_{t|t-1}(\theta)]^{k-N_x}, k = N_x + 1, \dots, 2N_x; \\ R_{t|t}(\theta) &= R_{t|t-1}(\theta) - \beta_t J_t \beta_t^T; \quad \beta_t = W_t J_t^{-1}; \\ J_t &= \sum_{k=0}^{2N_x} \bar{\omega}_k (B_t(\chi_{t|t-1}^k) - \hat{Y}_{t|t-1}) \cdot (B_t(\chi_{t|t-1}^k) - \hat{Y}_{t|t-1})^T + v_{yt}; \\ W_t &= \sum_{k=0}^{2N_x} \bar{\omega}_k (\chi_{t|t-1}^k - X_{t|t-1}(\theta)) \cdot (B_t(\chi_{t|t-1}^k) - \hat{Y}_{t|t-1})^T. \end{aligned}$$

Здесь $\chi_{t|t-1}^k, k = 0, \dots, 2N_x$ — набор сигма-точек; $[S_{t|t-1}(\theta)]^k$ — k -й столбец нижней треугольной матрицы $S_{t|t-1}(\theta)$ из разложения Холецкого $R_{t|t-1}(\theta) = S_{t|t-1}(\theta) S_{t|t-1}^T(\theta)$.

Совместную плотность распределения вероятности $p(Y, \theta)$ можно представить в виде произведения априорной плотности распределения $p(\theta)$ и правдоподобия $p(Y|\theta)$. Здесь $Y = (y_1, \dots, y_{n_y})$. Априорная плотность распределения содержит информацию о параметрах до проведения наблюдений, в том числе и экспертное мнение. После проведения наблюдения апостериорная плотность распределения находится по формуле Байеса:

$$p(\theta|Y) = \frac{p(Y|\theta)p(\theta)}{p(Y)}, \quad (10)$$

где $p(Y) = \int p(Y|\theta)p(\theta)d\theta$ — маргинальная плотность распределения y . Исходя из предположений о временной структуре наблюдений, мы можем записать

$$p(Y|\theta) = p(y_1|\theta) \prod_{t=2}^{n_y} p(y_t|Y_{t-1}, \theta),$$

где $Y_{t-1} = (y_1, \dots, y_{t-1})$ несет информацию до момента времени $t-1$.

Условная плотность $p(y_t|Y_{t-1}, \theta)$ и фильтрационная плотность $p(x_t|Y_{t-1}, \theta)$ при фиксированном θ удовлетворяют следующим рекуррентным уравнениям [Аоки, 1971]:

$$\begin{aligned} p(x_t|Y_t, \theta) &= \frac{p(y_t|x_t, \theta)}{p(y_t|Y_{t-1}, \theta)} p(x_t|Y_{t-1}, \theta); \\ p(x_t|Y_{t-1}, \theta) &= \int p(x_t|x_{t-1}, \theta)p(x_{t-1}|Y_{t-1}, \theta) dx_{t-1}; \\ p(y_t|Y_{t-1}, \theta) &= \int p(y_t|x_t, \theta)p(x_t|Y_{t-1}, \theta) dx_t. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче, кроме нормальной аппроксимации фильтрационной плотности, мы также будем при фиксированном значении вектора параметров θ осуществлять нормальную аппроксимацию и условной плотности $p(y_t|Y_{t-1}, \theta)$, от которой зависят условные плотности $p(\theta|Y)$ в формуле (10):

$$\begin{aligned} p(y_t|Y_{t-1}, \theta) &\sim N(\hat{Y}_{t|t-1}(\theta), J_t(\theta)), \hat{Y}_{t|t-1}(\theta) = E(y_t|Y_{t-1}, \theta); \\ J_t(\theta) &= E[(y_t - \hat{Y}_{t|t-1})(y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^T | Y_{t-1}, \theta]. \end{aligned}$$

В случае ЕКФ из уравнения (9) получаем для $\hat{Y}_{t|t-1}(\theta)$ и ковариационной матрицы обновляющего процесса $J_t(\theta)$ следующие соотношения [см., например, Синицын, 2006]:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t|t-1}(\theta) &= E(B_t(X_t) + \varepsilon_t^Y | Y_{t-1}, \theta) = B_t(\hat{X}_{t|t-1}(\theta)); \\ J_t(\theta) &= H_t R_{t|t-1}(\theta) H_t^T + v_{y_t}, \end{aligned}$$

а в случае UKF $\hat{Y}_{t|t-1}(\theta)$ и $J_t(\theta)$ определяются на этапе коррекции.

Таким образом, условная плотность $p(Y|\theta)$ аппроксимируется произведением:

$$p(Y|\theta) \approx \prod_{t=1}^{n_y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det J_t(\theta)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^T J_t^{-1}(\theta) (y_t - \hat{Y}_{t|t-1}) \right] \right\}.$$

Из формулы (10) получаем приближенное выражение для апостериорной плотности с точностью до константы:

$$\begin{aligned} p(\theta|Y) &\propto p(\theta) \times \\ &\times \prod_{t=1}^{n_y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det J_t(\theta)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_t - \hat{Y}_{t|t-1})^T J_t^{-1}(\theta) (y_t - \hat{Y}_{t|t-1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оценки неизвестного вектора параметров $\hat{\theta}$ находятся из условия максимума апостериорной плотности вероятности:

$$\hat{\theta} = \text{Arg max}_{\theta} (p(\theta|Y)).$$

Начальные условия

$$E(X_0) = \hat{X}_0, E[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T] = R_0$$

задают начальную оценку расширенного вектора состояния и его ковариационную матрицу ошибок оценивания R_0 . Эти величины могут быть как оцениваемыми параметрами модели, так и заданы приближенно, с большой начальной дисперсией ошибки оценивания, например экспертно, исходя из предыдущих оценок запаса или по результатам простейшего сепарабельного когортного анализа или ВПА [Gudmundsson, Gunnlaugsson, 2012; Ильин и др., 2016]. Это относится и к параметрам априорного распределения оцениваемого вектора $p(\theta)$.

В калмановской фильтрации для оценки состояния системы в момент времени t используются наблюдения $Y_t = (y_1, \dots, y_t)$ до момента времени t включительно. Практическое применение теории оптимальной фильтрации имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислять в реальном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент времени t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием и их вычисление

приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t , для оценивания состояния системы в момент времени t [Синицын, 2006]. Для того чтобы учесть все наблюдения $Y = (y_1, \dots, y_{n_y})$, применяется оптимальный в среднеквадратическом смысле интерполятор с фиксированным интервалом времени [Grewal, Andrews, 1993; Särkkä and Hartikainen, 2010], т.е. сглаживающий фильтр Калмана:

$$\begin{aligned} X_{t-1|n_y}(\theta) &= X_{t-1|t-1}(\theta) + G_{t-1} [X_{t|n_y}(\theta) - X_{t|t-1}(\theta)]; \\ R_{t-1|n_y}(\theta) &= R_{t-1|t-1}(\theta) + G_{t-1} [R_{t|n_y}(\theta) - R_{t|t-1}(\theta)] G_{t-1}^T; \\ G_{t-1} &= C_{t-1,t} R_{t|t-1}^{-1}(\theta), \end{aligned}$$

где $C_{t-1,t}$ находится по формуле

$$C_{t-1,t} = R_{t-1|t-1}(\theta) L_{t-1}^{-1}$$

для сглаживающего расширенного фильтра Калмана (EKS) и

$$C_{t-1,t} = \sum_{k=0}^{2N_x} \bar{\omega}_k \left(\chi_{t-1|t-1}^k - X_{t-1|t-1}(\theta) \right) \left(A_{t-1}(\chi_{t-1|t-1}^k) - X_{t|t-1}(\theta) \right)^T$$

для сглаживающего сигма-точечного фильтра Калмана (UKS).

В формулировке модели пространства состояний и формулах алгоритмов фильтрации и сглаживания (интерполяции) матрицы могут иметь переменную размерность, что позволяет без проблем учитывать пропущенные наблюдения.

При сделанных предположениях относительно ошибок в модели процесса и наблюдения выражения для оптимальной среднеквадратической оценки $E(X_t|Y)$ вектора состояния X_t и ее ковариационной матрицы R_t имеют вид

$$\begin{aligned} E(X_t|Y) &= \int E(X_t|Y, \theta) p(\theta|Y) d\theta = \int X_{t|n_y}(\theta) p(\theta|Y) d\theta; \\ R_t &= E \left[(X_t - E(X_t|Y))(X_t - E(X_t|Y))^T | Y \right] = \\ &= \int \left[R_{t|n_y}(\theta) + \left(X_{t|n_y}(\theta) - E(X_t|Y) \right) \left(X_{t|n_y}(\theta) - E(X_t|Y) \right)^T \right] p(\theta|Y) d\theta. \quad (12) \end{aligned}$$

При расчетах величин в последних двух формулах в настоящей работе $p(\theta|Y)$ аппроксимировали нормальным распределением с математическим ожиданием $\hat{\theta}$ и ковариационной матрицей, равной обратной к матрице Гессе в точке максимума апостериорной вероятности.

Результаты и их обсуждение

Тестовый пример

В вычислительном эксперименте мы сравнили качество оценок состояния запаса, полученных с использованием сглаживающих фильтров Калмана, EKS и UKS, а также модели «Синтез» [Ильин и др., 2014]. В тестовом примере «истинная» динамика эксплуатируемого запаса и наблюдения моделировались по уравнениям (1–6) со следующими параметрами:

- число лет $n_y = 20$, диапазон возрастных групп $a = 2, \dots, 10$, $n_a = 9$;
- начальная численность пополнения $N_{0,2} = 2000$, шум процесса для пополнения $\varepsilon_t^R \sim N(0, \sigma_R^2)$, $\sigma_R = 0,3$;
- начальное значение коэффициента промышленной смертности $F_0 = 0,2$, шум процесса $\varepsilon_t^F \sim N(0, \sigma_F^2)$, $\sigma_F = 0,3$;
- начальные значения и соответствующие шумы процесса для параметров логистической функции селективности

$$r_{10} = 1, \varepsilon_{r1,t} \sim N(0, \sigma_{r1}^2), \sigma_{r1} = 0,1, r_{20} = 4, \varepsilon_{r2,t} \sim N(0, \sigma_{r2}^2), \sigma_{r2} = 0,1;$$

— начальное распределение численности по возрастным группам

$$N_{0,a} = 2000 \exp(-M_{0,a-1} - F_{0,a-1}), a = 3, \dots, 10;$$

— шум процесса $\varepsilon_{t,a}^N \sim N(0, \sigma_N^2)$;

— масса, доля зрелых особей и мгновенные коэффициенты естественной смертности

$$m_{t,a} = 2(1 - \exp(-0,3a))^3; \rho_{t,a} = \frac{1}{1 + \exp(-2(a-4))}; M_{t,a} = 0,3;$$

— шум наблюдений для уловов по возрастным группам $\varepsilon_{t,a}^C \sim N(0, \sigma_C^2)$;

— шум наблюдений для индекса промысловой биомассы I_t^1 (улов на единицу промыслового усилия) $\varepsilon_t^{I^1} \sim N(0, \sigma_{I^1}^2)$;

— шум наблюдений для индекса I_t^2 (нерестовой биомассы) $\varepsilon_t^{I^2} \sim N(0, \sigma_{I^2}^2)$, для простоты приняли $\sigma_C = \sigma_{I^1} = \sigma_{I^2}$;

— коэффициенты улавливаемости $q_1 = 0,013, q_2 = 1,0$.

Априорная оценка вектора состояния при расчетах была выбрана существенно отличной от «истинного» состояния:

$$\hat{X}_0 = E(X_0) = [\ln(\hat{N}_{0,2}), \dots, \ln(\hat{N}_{0,10}), \ln(\hat{F}_0), \ln(\hat{r}_{10}), \ln(\hat{r}_{20})];$$

$$N_{0,2} = 1000, N_{0,a} = 1000 \exp(-M_{0,a-1} - \hat{F}_0 s_{0,a-1}), a = 3, \dots, 10;$$

$$s_{0,a} = \frac{1}{1 + \exp(-\hat{r}_{10}(a - \hat{r}_{20}))}; \hat{F}_0 = 0,35; \hat{r}_{10} = 1,4; \hat{r}_{20} = 6,$$

а априорную ковариационную матрицу ошибки оценивания задали в виде диагональной матрицы:

$$R_0 = \text{diag} \left[\underbrace{0,5, \dots, 0,5}_{n_a}, 0,5, 0,25, 0,25 \right].$$

Оцениваемыми по данным наблюдений параметрами являлись натуральные логарифмы дисперсий шумов $\sigma_C^2, \sigma_{I^1}^2, \sigma_{I^2}^2$ и коэффициентов улавливаемости q_1, q_2 . В качестве априорного распределения для оцениваемых параметров взяли равномерное распределение на широком интервале, т.е. чтобы оно не влияло на положение максимума апостериорной вероятности.

Расчеты проводились для нескольких пар значений (σ_C, σ_N) , причем $\sigma_C > \sigma_N$. Методом Монте-Карло получили 100 реализаций шумов процесса и наблюдения, для каждой из которых по формулам (1)–(6) нашли «истинную» динамику состояния запаса и наблюдений. По полученным таким образом наблюдениям тремя методами (EKS, UKS, «Синтез») оценивались состояние запаса и неизвестные параметры модели. На рис. 1–4 представлены одна из реализаций для индексов запаса при $\sigma_C = 0,2$ и $\sigma_N = 0,1$ и некоторые соответствующие ей результаты оценивания.

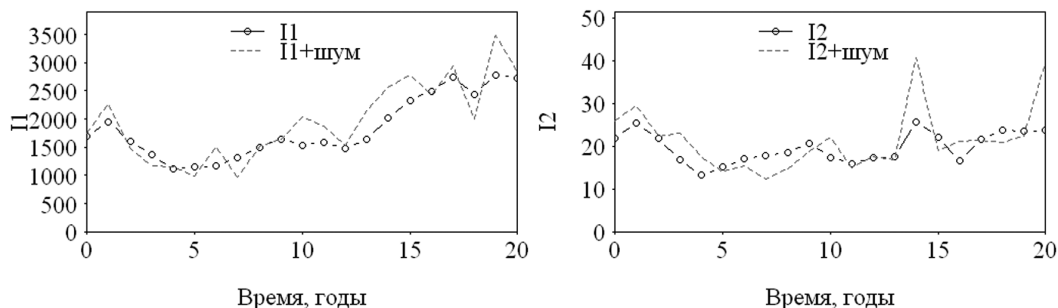


Рис. 1. Динамика индексов на 1-й реализации при $\sigma_C = 0,2$ и $\sigma_N = 0,1$

Fig. 1. Dynamics of indices, the 1st realization with $\sigma_C = 0.2$ and $\sigma_N = 0.1$

На представленных рисунках видно, что оценки терминальной численности запаса, пополнения и коэффициента промысловой смертности, полученные методами субоптимальной интерполяции (EKS, UKS), лучше соответствуют «истинной» динами-

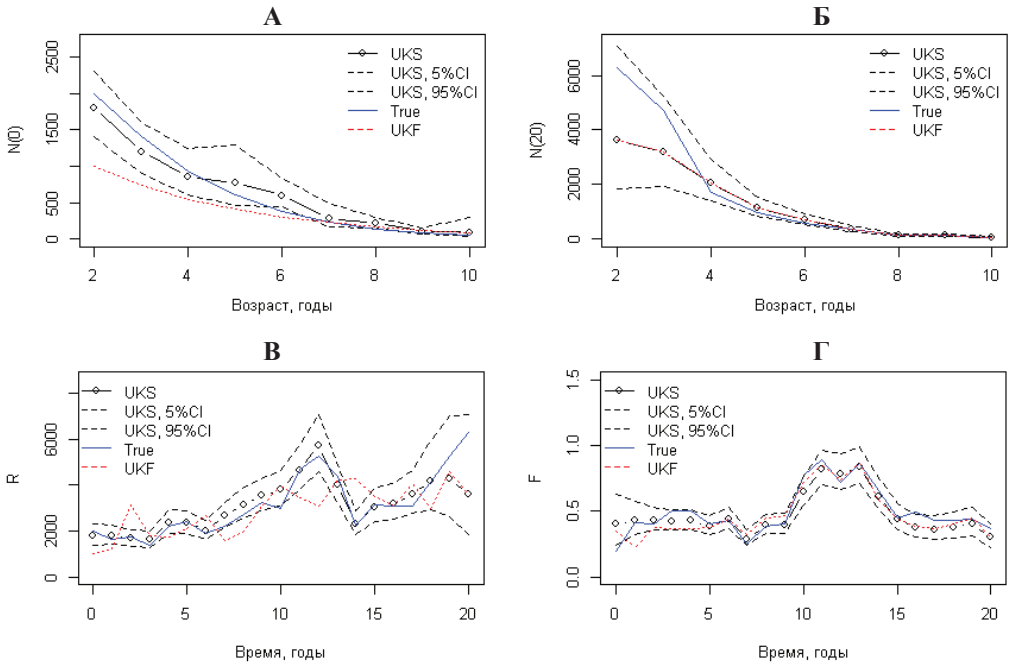


Рис. 2. Начальная (А) и терминальная (Б) численность запаса, динамика пополнения (В) и коэффициента промысловой смертности (Г) по результатам применения сигма-точечного фильтра Калмана UKF и сигма-точечного сглаживающего фильтра Калмана UKS на 1-й реализации ($\sigma_C = 0,2$ и $\sigma_N = 0,1$)

Fig. 2. Initial (А) and terminal (Б) abundance of the stock and dynamics of recruitment (В) and fishing mortality rate (Г) estimated with the unscented Kalman filter (UKF) and unscented Kalman smoother (UKS) application, in the 1st realization ($\sigma_C = 0.2$ и $\sigma_N = 0.1$)

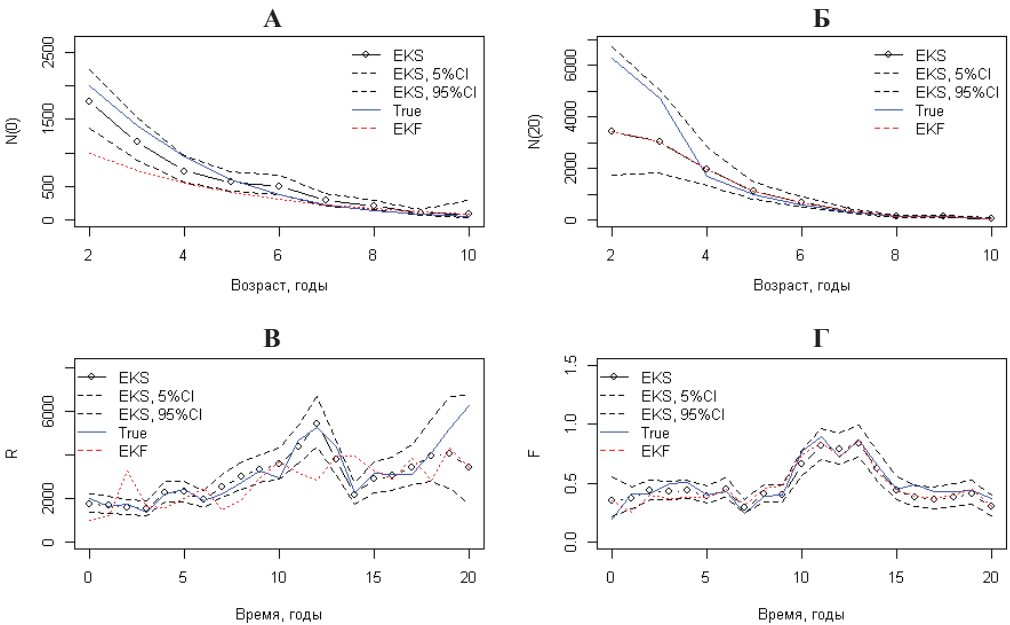


Рис. 3. Начальная (А) и терминальная (Б) численность запаса, динамика пополнения (В) и коэффициента промысловой смертности (Г) по результатам применения расширенного фильтра Калмана EKF и расширенного сглаживающего фильтра Калмана EKS на 1-й реализации ($\sigma_C = 0,2$ и $\sigma_N = 0,1$)

Fig. 3. Initial (А) and terminal (Б) abundance of the stock and dynamics of recruitment (В) and fishing mortality rate (Г) estimated with the extended Kalman filter (EKF) and extended Kalman smoother (EKS) application, in the 1st realization ($\sigma_C = 0.2$ и $\sigma_N = 0.1$)

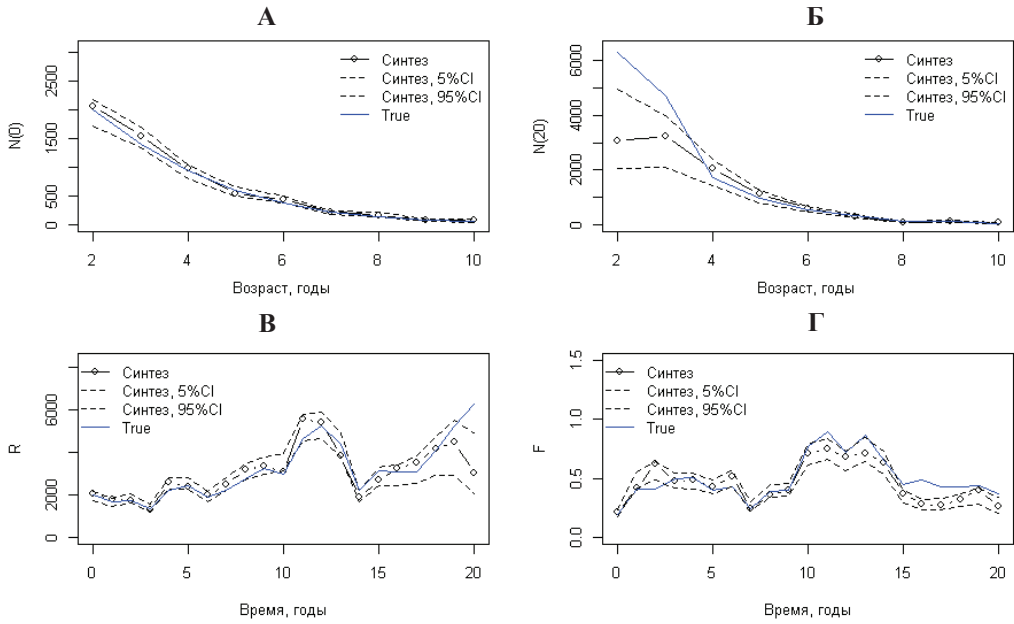


Рис. 4. Начальная (А) и терминальная (Б) численность запаса, динамика пополнения (В) и коэффициента промысловой смертности (Г) по результатам применения когортной модели «Синтез» на 1-й реализации ($\sigma_C = 0,2$ и $\sigma_N = 0,1$)

Fig. 4. Initial (А) and terminal (Б) abundance of the stock and dynamics of recruitment (В) and fishing mortality rate (Г) estimated with the SinteZ cohort model, in the 1st realization ($\sigma_C = 0.2$ and $\sigma_N = 0.1$)

ке запаса, чем оценки, найденные в когортной модели «Синтез». Оценки, полученные с помощью фильтров ЕKF и UKF (т.е. без сглаживания), кроме оценок терминального состояния, очевидно, хуже, чем по модели «Синтез». Разброс оценок у последней оказался уже, и в ряде случаев 90 %-ные доверительные интервалы оценок по модели «Синтез» не покрывали «истинных» значений.

В качестве критерия при сравнении оценок, найденных указанными выше тремя методами, использовали накопленную среднюю квадратическую ошибку (ARMSE) для вектора оцениваемых параметров:

$$ARMSE(\theta) = \sqrt{\frac{1}{Nn} \sum_k \sum_i (\theta_k - \hat{\theta}_k^i)^2}$$

и состояния запаса:

$$ARMSE(X) = \sqrt{\frac{1}{Nn_y n_a} \sum_i \sum_t \sum_{a=1 \dots n_a} (X_{t,a}^i - \hat{X}_{t,a}^i)^2}.$$

В последних формулах N — число реализаций; $n = 5$ — число компонент вектора θ ; θ_k и $\hat{\theta}_k^i$ — соответственно «истинная» и оцененная на i -й реализации k -я компонента вектора θ ; $X_{t,a}^i$ и $\hat{X}_{t,a}^i$ — соответственно «истинная» и оцененная на i -й реализации a -я компонента вектора состояния запаса в момент времени t .

В табл. 1 представлены значения ARMSE в тестовом примере для разных пар значений (σ_C , σ_N). Они свидетельствуют о том, что в целом в условиях присутствия шума процесса представленные сглаживающие фильтры Калмана ЕKS и UKS превосходят «Синтез» по точности оценивания. В представленном тестовом примере UKS немного лучше оценивает состояние запаса, чем ЕKS. В свою очередь, ЕKS немного лучше, чем UKS, оценивает неизвестный вектор параметров θ .

Таблица 1

Значения накопленной средней квадратической ошибки *ARMSE* в тестовом примере

Table 1

Average root mean square error (*ARMSE*) values in the test example

Метод	$\sigma_c = 0,1, \sigma_N = 0,01$		$\sigma_c = 0,2, \sigma_N = 0,1$	
	<i>ARMSE</i> (θ)	<i>ARMSE</i> (<i>X</i>)	<i>ARMSE</i> (θ)	<i>ARMSE</i> (<i>X</i>)
EKF	0,322	0,094	0,274	0,160
UKF	0,340	0,088	0,284	0,155
Синтез	0,754	0,142	0,327	0,192
Метод	$\sigma_c = 0,5, \sigma_N = 0,1$		$\sigma_c = 0,5, \sigma_N = 0,2$	
	<i>ARMSE</i> (θ)	<i>ARMSE</i> (<i>X</i>)	<i>ARMSE</i> (θ)	<i>ARMSE</i> (<i>X</i>)
EKF	0,277	0,256	0,283	0,301
UKF	0,278	0,249	0,289	0,295
Синтез	0,279	0,292	0,270	0,327

Как известно, преимущество UKF перед EKF заключается в более высоком порядке аппроксимации оценки математического ожидания неизвестного вектора состояния системы при сравнимой вычислительной сложности. В данном тестовом примере это преимущество слабо проявляется. Близость значений *ARMSE*(*X*) для двух фильтров можно объяснить близостью переходной функции *A_t* к линейной.

В представленном тестовом примере на одно вычисление значения апостериорной плотности с алгоритмом EKS затрачивалось в среднем примерно в 2,25 раза меньше времени, чем с UKS. Вычисление значений целевой функции в модели «Синтез» в среднем в 65 раз быстрее вычисления значения апостериорной плотности с UKS, а при больших шумах процесса и наблюдения точность оценок может быть сравнимой (табл. 1).

Восточнокамчатский минтай Gadus chalcogrammus

Проиллюстрируем применение сглаживающего сигма-точечного фильтра Калмана (UKS) для оценки состояния запасов восточнокамчатского минтая *Gadus chalcogrammus*. В расчетах были использованы следующие данные наблюдений:

- вылов *C_{t,a}* (млн экз.) восточнокамчатского минтая по возрастам (2–14 лет) и годам (1975–2021 гг.);
- стандартизированный с помощью обобщенной линейной модели индекс улова на единицу промыслового усилия (*I₁*);
- оценки продукции икры восточнокамчатского минтая в эпицентре нереста — «северном» каньоне в 2003–2020 гг. [Ильин и др., 2014] (*I₂*);
- оценки биомассы нерестового запаса по данным ихтиопланктонных съемок в 2003–2011, 2013 и 2018 гг. (*I₃*).

Данные по среднемноголетней массе и доле половозрелых рыб представлены на рис. 5.

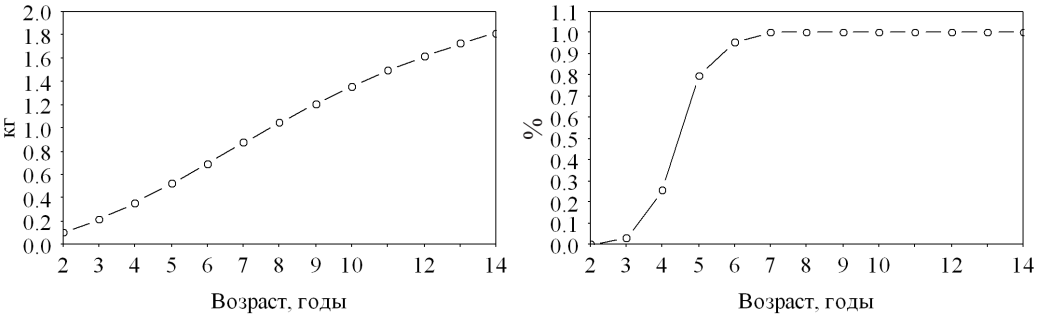


Рис. 5. Средняя масса (слева) и доля половозрелых рыб (справа) у восточнокамчатского минтая

Fig. 5. Mean weight (left panel) and portion of mature fish (right panel) for walleye pollock at East Kamchatka

Вид функции селективности — экспоненциально-логистический:

$$s_{t,a} = \frac{\exp(r_{1t}r_{2t}(r_{3t} - a))}{1 - r_{2t}[1 - \exp(r_{1t}(r_{3t} - a))]},$$

где r_{1t}, r_{2t}, r_{3t} — параметры; a — возраст.

Таким образом, вектор состояния имеет вид

$$X_t = [\ln N_{t,2}, \dots, \ln N_{t,14}, \ln F_t, \ln r_{1t}, \ln r_{2t}, \ln r_{3t}]^T,$$

а вектор наблюдения:

$$y_t = [\ln C_{t,2}, \dots, \ln C_{t,14}, \ln I_t^1, \ln I_t^2, \ln I_t^3]^T.$$

Предполагается, что:

- шум процесса для пополнения $\varepsilon_t^R \sim N(0, \sigma_R^2)$;
- шум процесса для коэффициента промысловой смертности $\varepsilon_t^F \sim N(0, \sigma_F^2)$;
- шумы процесса для параметров экспоненциально-логистической функции селективности:

$$\varepsilon_{r1,t} \sim N(0, \sigma_{r1}^2), \quad \varepsilon_{r2,t} \sim N(0, \sigma_{r2}^2), \quad \varepsilon_{r3,t} \sim N(0, \sigma_{r3}^2);$$

- шум процесса $\varepsilon_{t,a}^N \sim N(0, \sigma_N^2)$, $\sigma_N = 0,01$;
- мгновенные коэффициенты естественной смертности $M = M = \text{const}$;
- шум наблюдений для уловов по возрастным группам $\varepsilon_{t,a}^{N,a} \sim N(0, \Sigma_C)$;
- шум наблюдений для индекса промысловой биомассы I_t^1 (улов на единицу промыслового усилия) $\varepsilon_t^{I1} \sim N(0, \sigma_{I1}^2)$;
- шумы наблюдений для индексов нерестовой биомассы $\varepsilon_t^{I2} \sim N(0, \sigma_{I2}^2)$ и $\varepsilon_t^{I3} \sim N(0, \sigma_{I3}^2)$;
- коэффициент улавливаемости $q_3 = 1,0$.

Априорная оценка вектора состояния основывается на предыдущих оценках состояния запаса этого объекта:

$$\hat{X}_0 = E(X_0) = [\ln(\hat{N}_{0,2}), \dots, \ln(\hat{N}_{0,14}), \ln(\hat{F}_0), \ln(\hat{r}_{10}), \ln(\hat{r}_{20}), \ln(\hat{r}_{30})];$$

$$N_{0,a} = 10300 \exp(-0,55a), a = 2, \dots, 14;$$

$$\hat{F}_0 = 0,25; \hat{r}_{10} = 1,4; \hat{r}_{20} = 0,05; \hat{r}_{30} = 6.$$

Априорную ковариационную матрицу ошибки оценивания задали в виде диагональной матрицы:

$$R_0 = \text{diag} \left[\underbrace{0,5, \dots, 0,5}_{n_a}, 0,25, 0,25, 0,1, 0,25 \right].$$

Для коэффициента естественной смертности восточнокамчатского минтая выбрано априорное распределение $\ln M \sim N(\ln(0,25), 0,2^2)$, априорные распределения остальных оцениваемых параметров принимались неинформативными.

Рассмотрены четыре варианта параметризации ковариационной матрицы Σ_C (табл. 2). В первом варианте ковариационная матрица Σ_C является диагональной, все элементы одинаковы, т.е. дисперсия ошибки наблюдения в данных об уловах по возрастам одинаковая, корреляция между данными по разным возрастам отсутствует. Во втором варианте диагональные элементы матрицы Σ_C зависят от возраста рыб кусочно-линейно, корреляция отсутствует. В третьем варианте присутствует корреляционная структура типа авторегрессии первого порядка AR(1) при одинаковых диагональных элементах. И наконец, четвертый вариант учитывает и корреляционную структуру (типа AR(1)), и кусочно-линейную зависимость от возраста диагональных элементов ковариационной матрицы Σ_C . Можно задать и более сложную корреляционную структуру ковариационных матриц ошибок процесса и наблюдения, но мы здесь ограничиваемся только представленными вариантами.

Таблица 2

Значения максимума логарифма апостериорной плотности вероятности при различных вариантах параметризации ковариационной матрицы Σ_C

Table 2

Values of the maximum logarithm a posterior probability for various parameterization of the covariance matrix Σ_C

№	Вид ковариационной матрицы Σ_C	Оцениваемые параметры и их число n	Максимум логарифма апостериорной плотности вероятности (с точностью до постоянного слагаемого)
1	$\Sigma_C = \sigma_C^2 I$, I — единичная матрица $n_a \cdot n_a$, $n_a = 13$	$\theta = (q_1, q_2, \sigma_F^2, \sigma_{r1}^2, \sigma_{r2}^2, \sigma_{r3}^2, \sigma_R^2, \sigma_C^2, \sigma_{I1}^2, \sigma_{I2}^2, \sigma_{I3}^2, M)^T$, $n = 12$	55,504
2	$\Sigma_C = \text{diag}[\sigma_C^2(2), \dots, \sigma_C^2(14)]$, $\sigma_C(a) = \begin{cases} A(a_0 - a) + \sigma_{C0}, & a < a_0 \\ B(a - a_0) + \sigma_{C0}, & a > a_0 \end{cases}$	$\theta = (q_1, q_2, \sigma_F^2, \sigma_{r1}^2, \sigma_{r2}^2, \sigma_{r3}^2, \sigma_R^2, \sigma_{C0}, A, B, a_0, \sigma_{I1}^2, \sigma_{I2}^2, \sigma_{I3}^2, M)^T$, $n = 15$	100,589
3	$\Sigma_C = \sigma_C^2 R_C$, где R_C — матрица с элементами $R_C^{i,j} = \bar{\rho}^{ i-j }$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{1+\rho}$,	$\theta = (q_1, q_2, \sigma_F^2, \sigma_{r1}^2, \sigma_{r2}^2, \sigma_{r3}^2, \sigma_R^2, \sigma_C^2, \rho, \sigma_{I1}^2, \sigma_{I2}^2, \sigma_{I3}^2, M)^T$, $n = 13$	156,204
4	$\Sigma_C = \text{diag}[\sigma_C(2), \dots, \sigma_C(14)] \times R_C \cdot \text{diag}[\sigma_C(2), \dots, \sigma_C(14)]$, где R_C — матрица с элементами $R_C^{i,j} = \bar{\rho}^{ i-j }$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{1+\rho}$, а $\sigma_C(a) = \begin{cases} A(a_0 - a) + \sigma_{C0}, & a < a_0 \\ B(a - a_0) + \sigma_{C0}, & a > a_0 \end{cases}$	$\theta = (q_1, q_2, \sigma_F^2, \sigma_{r1}^2, \sigma_{r2}^2, \sigma_{r3}^2, \sigma_R^2, \sigma_{C0}, A, B, a_0, \rho, \sigma_{I1}^2, \sigma_{I2}^2, \sigma_{I3}^2, M)^T$, $n = 16$	209,942

Как видно из данных табл. 2, учет корреляции и зависимости от возраста в ковариационной матрице шума наблюдения может существенно улучшить подгонку модели. Из рассмотренных вариантов модели наибольшее значение максимума логарифма апостериорной плотности имеет вариант № 4. Основные результаты оценки состояния запасов восточнокамчатского минтая в соответствии с этим вариантом представлены на рис. 6–9.

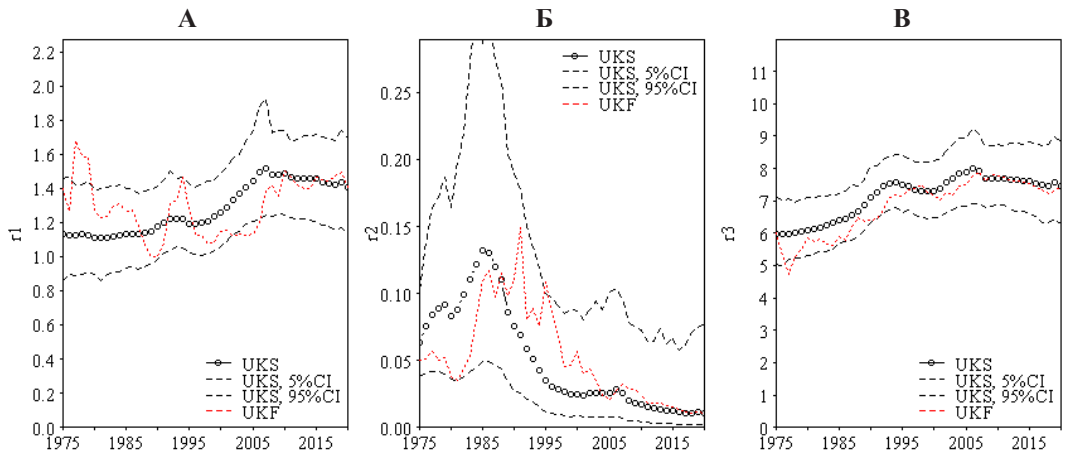


Рис. 6. Динамика параметров r_1 (А), r_2 (Б), r_3 (В) функции селективности восточнокамчатского минтая

Fig. 6. Dynamics of parameters r_1 (А), r_2 (Б), r_3 (В) for the selectivity function of walleye Pollock at East Kamchatka

Рис. 7. Изменение коэффициента селективности восточнокамчатского минтая в зависимости от возраста и времени

Fig. 7. Coefficient of selectivity for walleye pollock at East Kamchatka in dependence on age and time

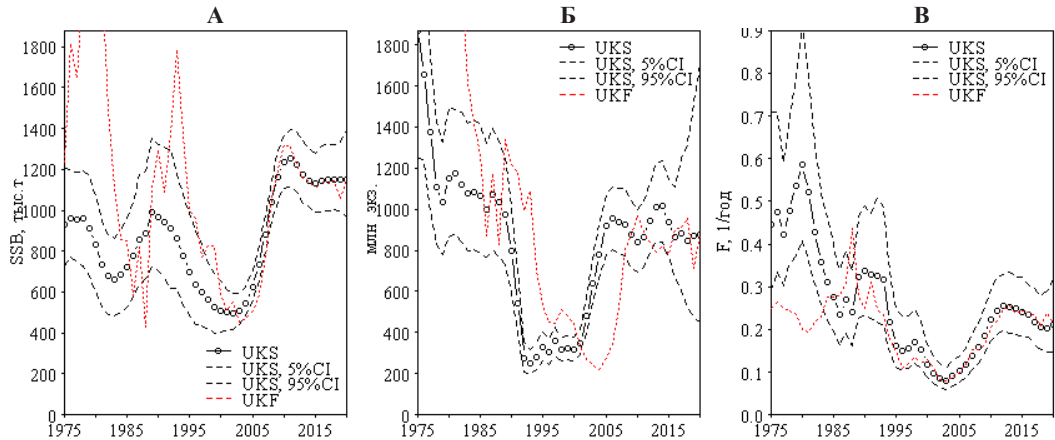
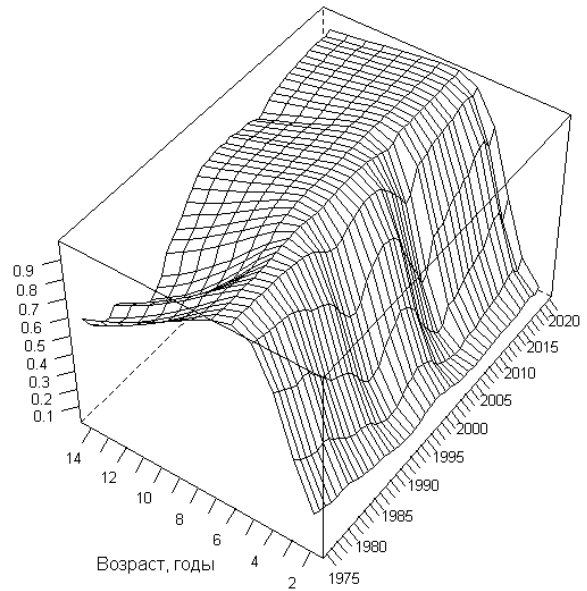


Рис. 8. Оценки биомассы нерестового запаса (А), численности пополнения (Б) и коэффициента промысловой смертности (В) восточнокамчатского минтая

Fig. 8. Estimates of the spawning stock biomass (А), recruitment abundance (Б), and fishing mortality rate (В) for walleye pollock at East Kamchatka

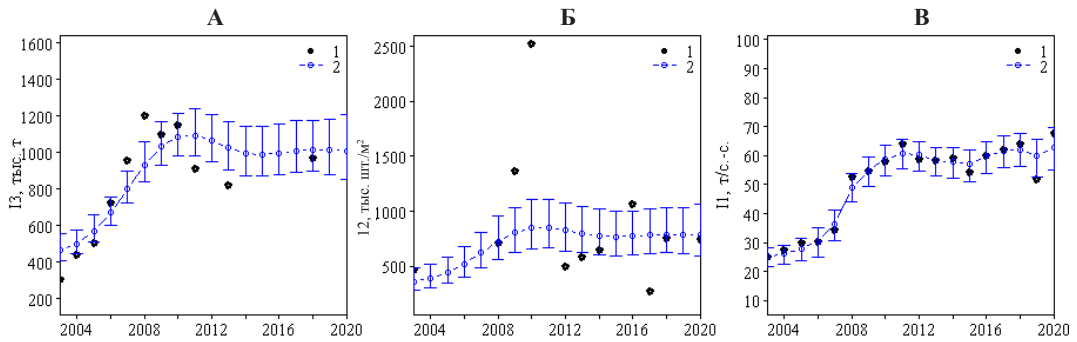


Рис. 9. Исходные (1) и отфильтрованные (2) с 90 %-ными доверительными границами индексы нерестового запаса (А), продукции икры (Б) и улова на усилие (В) для восточнокамчатского минтая

Fig. 9. Initial (1) and filtered (2) indices of the spawning stock (А), egg production (Б), and catch per unite effort (В) for walleye pollock at East Kamchatka. Limits of 90 % confidence are shown

Оценки, полученные в реальном времени с помощью сигма-точечного фильтра UKF, и оценки сглаженного фильтра UKS в начале моделируемого отрезка времени различаются существенно. Связано это с тем, что наблюдения I_t^k , $k = 1, 2, 3$, приходится на конец моделируемого отрезка времени и UKF о них не «знает». То же самое касается любых пропусков в данных. Исходя из этого, фильтры EKF и UKF можно рекомендовать только для оценки терминального состояния запаса. Однако при прогнозировании состояния запаса и планировании стратегии его рационального использования важно восстановить динамику запаса в ретроспективе. Ретроспективная динамика во многом определяет значения ориентиров управления для зональных правил регулирования промысла. Таким образом, целесообразно применение сглаженных фильтров UKS (или EKS).

На рис. 6, 7 можно увидеть изменения в селективности, связанные с последствиями введения в 2001 г. для Дальневосточного бассейна запрета (п. 18.3 в современной редакции Правил рыболовства) на использование при специализированном промысле минтая во всех районах его добычи разноглубинных тралов без селективной вставки с квадратным расположением ячеи, устанавливаемой между мотенной частью трала и траловым мешком (кутцом). В последние годы можно увидеть увеличение селективности в отношении мелкоразмерного минтая, которое обусловлено ростом начиная с 2016 г. числа судов на промысле минтая, оснащенных тралами нового типа, в основном иностранного производства («Атлантика» (несколько модификаций), «Egersund», «Gloria» (несколько модификаций) и др.) [Варкентин и др., 2021a].

Результаты расчетов (рис. 8) свидетельствуют о стабилизации запаса восточнокамчатского минтая в последние годы на высоком уровне — около 1,1 млн т нерестовой биомассы. Качественно представленные ретроспективные оценки запаса восточнокамчатского минтая схожи с представленными в материалах обоснований ОДУ этого вида оценками по модели «Синтез» [Варкентин и др., 2021б]. Количественные различия в оценках связаны в основном с существенной разницей в коэффициентах естественной смертности и настройках используемых моделей.

Для диагностики использовались так называемые «нормированные обновления», входящие в уравнение (11):

$$L_t^{-1}(\hat{\theta})(y_t - \hat{Y}_{t|t-1}), L_t(\hat{\theta}) \cdot L_t^T(\hat{\theta}) = J_t(\hat{\theta})$$

и «сглаженные» остатки:

$$\varepsilon_{t|n_y}^Y = y_t - B_t(X_{t|n_y}).$$

Проверка нулевых гипотез о нормальности распределения и равенстве нулю математических ожиданий этих величин осуществлялась с помощью тестов Шапиро-Уилка и Стьюдента. Для индексов запаса I_t^1, I_t^2, I_t^3 на уровне значимости $p < 0,05$ нет оснований отвергнуть эти гипотезы.

След ковариационной матрицы вектора состояния является скалярным выражением его дисперсии. На рис. 10 представлено изменение во времени следа ковариационной матрицы среднеквадратической оценки вектора состояния при оптимальном $\hat{\theta}$:

$$D(X|Y, \hat{\theta}) = \text{Tr}(R_{t|n_y}(\hat{\theta})) = \sum_i (R_{t|n_y}(\hat{\theta}))_{i,i}$$

и следа ковариационной матрицы оптимальной среднеквадратической оценки уравнения (12),

$$D(X|Y) = \text{Tr}(R_t).$$

Чем меньше неопределенность в оценке параметров, тем меньше разница между этими двумя величинами. Для восточнокамчатского минтая эта разница оказалась существенной. При этом наибольший разброс оценок — у параметров дисперсий шумов процесса и наблюдения (табл. 3).

Кусочно-линейную зависимость от возраста диагональных элементов ковариационной матрицы иллюстрирует рис. 11. Наименьший разброс ошибок наблюдения приходится на возрастные группы со значениями коэффициента селективности, близкими к максимальному.

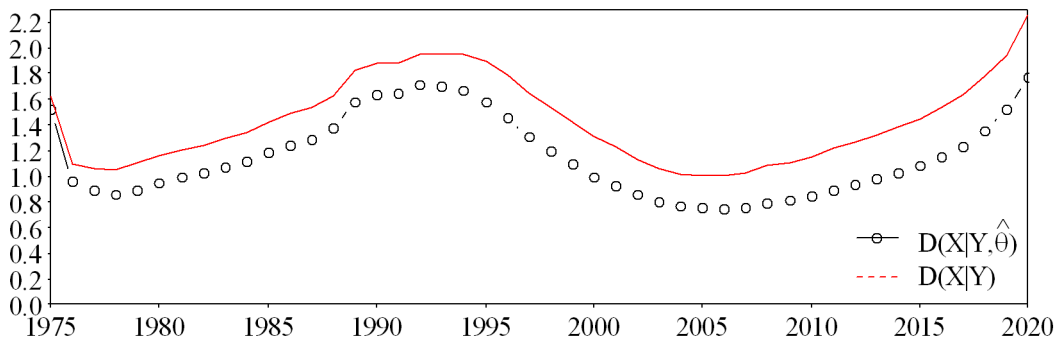


Рис. 10. Динамика следов ковариационных матриц $D(X|Y, \hat{\theta})$ и $D(X|Y)$
Fig. 10. Dynamics of traces of covariance matrices $D(X|Y, \hat{\theta})$ and $D(X|Y)$

Таблица 3

Оценки параметров модели и их коэффициенты вариации (CV)

Table 3

Estimated model parameters and their coefficients of variation (CV)

Параметр	Оценка	CV	Параметр	Оценка	CV
q_1	0,0591	0,077	σ_0	0,3169	0,119
q_2	0,7756	0,176	A	0,2119	0,119
σ_F^2	0,0491	0,350	B	0,0346	0,230
σ_{r1}^2	0,0022	1,170	σ_{r1}^2	0,0053	0,563
σ_{r2}^2	0,0765	0,607	σ_{r2}^2	0,2922	0,431
σ_{r3}^2	0,0010	0,576	σ_{r3}^2	0,0437	0,514
σ_R^2	0,0401	0,244	ρ	2,4280	0,175
a_0	6,0008	0,008	M	0,1949	0,090

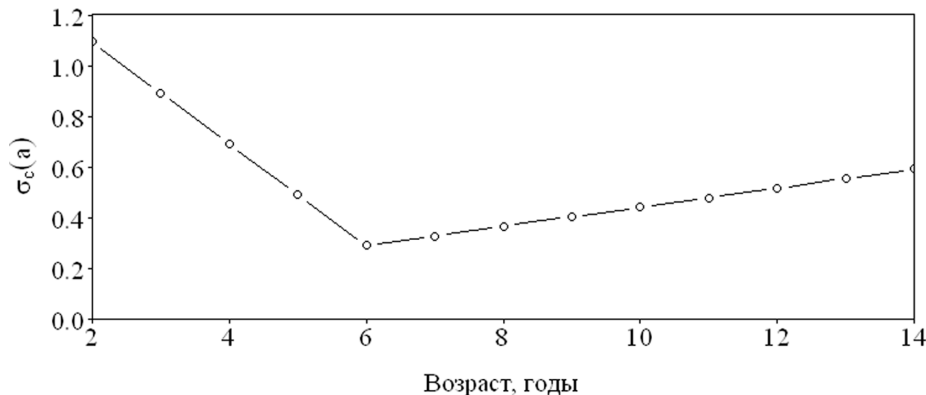


Рис. 11. Изменение стандартного отклонения ошибки наблюдения в уловах в зависимости от возраста рыб
Fig. 11. Standard deviation of observation error in catches in dependence on age of fish

При оценке запаса восточнокамчатского минтая начальная догадка о векторе состояния и ковариационной матрице ошибки оценивания основывалась на предыдущих ретроспективных оценках (начальная догадка «0»). Дополнительно были проведены расчеты при следующих вариантах априорных данных:

начальная догадка «1»: $\hat{N}_{0,a} = 3000 \exp(-0.4a), a = 2, \dots, 14;$
 $\hat{F}_0 = 0,35; \hat{r}_{10} = 1,2; \hat{r}_{20} = 0,08; \hat{r}_{30} = 7,$
начальная догадка «2»: $\hat{N}_{0,a} = 15000 \exp(-0,8a), a = 2, \dots, 14;$
 $\hat{F}_0 = 0,15; \hat{r}_{10} = 1,6; \hat{r}_{20} = 0,03; \hat{r}_{30} = 5.$

Во всех вариантах априорная ковариационная матрица ошибки оценивания оставалась неизменной. Результаты расчетов демонстрируют, что изменение априорной догадки в широких пределах слабо влияет на оценку состояния запаса восточнокамчатского минтая в терминальный год (рис. 12). Это свидетельствует об устойчивости по начальным данным представленных алгоритмов субоптимальной фильтрации и интерполяции в когортной модели оценки запасов.

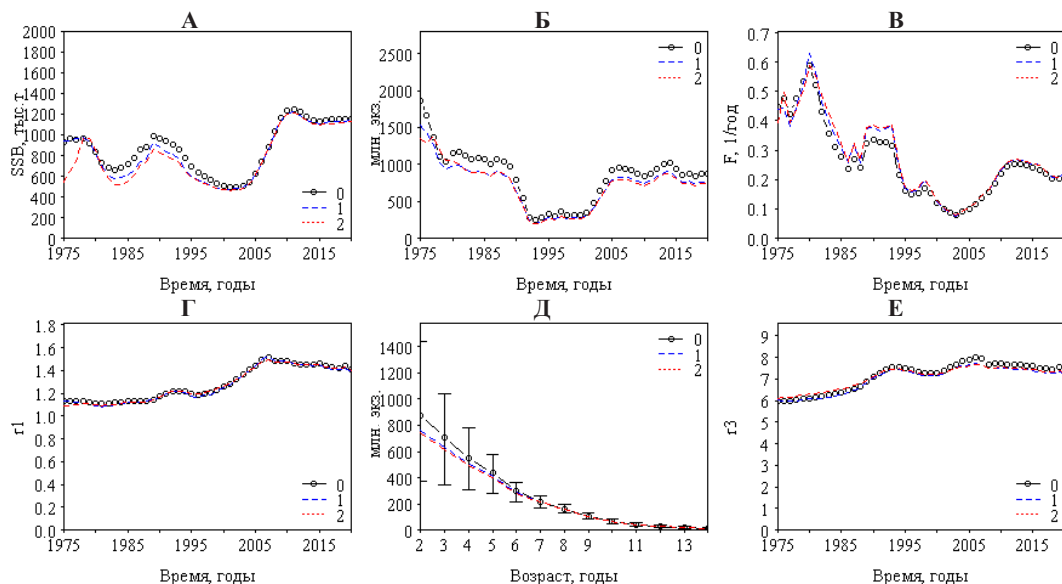


Рис. 12. Оценки биомассы нерестового запаса (А), численности пополнения (Б), коэффициента промысловой смертности (В), параметров функции селективности (Г, Е), терминальной численности (Д) восточнокамчатского минтая при различных априорных оценках вектора состояния «0», «1» и «2» (описание в тексте)

Fig. 12. Estimates of the spawning stock biomass (А), recruitment abundance (Б), fishing mortality rate (В), selectivity function parameters (Г, Е), and terminal abundance (Д) for walleye pollock at East Kamchatka in cases of various a priori estimates of the state vector «0», «1» and «2» (see description in the text)

Заключение

В настоящей работе оценка состояния запаса и неизвестных параметров когортной модели в пространстве состояний сводится к решению совместной задачи субоптимальной фильтрации и параметрической идентификации. Рассмотрены два алгоритма субоптимальной фильтрации и интерполяции для когортной модели — сглаживающий расширенный фильтр Калмана и сглаживающий сигма-точечный фильтр Калмана.

Полученные в тестовом примере результаты показывают, что по критерию накопленной средней квадратической ошибки UKS несколько лучше оценивает состояние запаса, чем EKS. В свою очередь, EKS немного лучше, чем UKS, оценивает неизвестный вектор параметров модели. Близость значений ARMSE для двух фильтров можно объяснить близостью переходной функции системы к линейной. Оценки, полученные с помощью фильтров EKF и UKF (т.е. без сглаживания), хуже, чем оценки EKS и UKS. Фильтры EKF и UKF можно рекомендовать только для оценки терминального состояния запаса.

На основе представленной когортной модели с применением сглаживающего сигма-точечного фильтра Калмана получены оценки запасов и популяционных параметров восточнокамчатского минтая. Они говорят о стабилизации запаса восточнокамчатского минтая на высоком уровне в последние годы. Учет корреляции и зависимости от возраста в ковариационной матрице шума наблюдения может существенно улучшить подгонку модели. Результаты расчетов показывают, что представленные в настоящей работе алгоритмы субоптимальной фильтрации и интерполяции для когортной модели оценки запасов устойчивы по начальным данным.

Предложенный подход может быть применен для оценки запасов других рыбо-промысловых объектов, если данные наблюдений позволяют использование структурированных по возрасту моделей в пространстве состояний.

Благодарности (ACKNOWLEDGEMENTS)

Автор выражает искреннюю признательность всем сотрудникам Камчатского филиала ВНИРО, в разное время принимавшим участие в ихтиопланктонных съемках и в научно-исследовательских работах на промысловых судах, а также двум анонимным рецензентам за внимание, уделенное настоящей статье, ценные замечания и предложения.

The author expresses his sincere gratitude to all colleagues of the Kamchatka branch of VNIRO who at various times took part in the ichthyoplankton surveys and in researches aboard fishing vessels, as well as to two anonymous reviewers for their kind attention to the manuscript, valuable comments and suggestions.

Финансирование работы (FUNDING)

Исследование не имело спонсорской поддержки.
The study was not sponsored.

Соблюдение этических стандартов (COMPLIANCE WITH ETHICAL STANDARDS)

Все применимые международные, национальные и/или институциональные принципы ухода и использования животных были соблюдены. Библиографические ссылки на все данные других авторов, использованные в статье, оформлены в соответствии с ГОСТом.

All applicable international, national and/or institutional guidelines for the care and use of animals have been followed. Bibliographic references to all data of other authors used in the article are made in accordance with the Russian state standards (GOST).

Список литературы

- Аоки М. Оптимизация стохастических систем : моногр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 1971. — 424 с.
- Варкентин А.И., Малых К.М., Ильин О.И. Некоторые данные о селективности промысла минтая разноглубинными тралами в северо-восточной части Охотского моря, в тихоокеанских водах, прилегающих к Камчатке и северным Курильским островам // Вопр. рыб-ва. — 2021а. — Т. 22, № 2. — С. 93–109. DOI: 10.36038/0234-2774-2021-22-2-93-109.
- Варкентин А.И., Сергеева Н.П., Ильин О.И., Овсянников Е.Е. Промысел, размерно-возрастной состав, состояние запасов и перспективы вылова минтая (*Gadus chalcogrammus*, Pallas, 1814) на акватории, прилегающей к Камчатскому полуострову и Северным Курильским островам // Исслед. водн. биол. ресурсов Камчатки и сев.-зап. части Тихого океана. — 2021б. — Вып. 60. — С. 5–42. DOI: 10.15853/2072-8212.2021.60.5-42.
- Ильин О.И., Варкентин А.И., Смирнов А.В. Об одном модельном подходе к оценке запасов минтая *Theragra chalcogramma* в северной части Охотского моря // Изв. ТИНРО. — 2016. — Т. 186. — С. 107–117. DOI: 10.26428/1606-9919-2016-186-107-117.
- Ильин О.И., Сергеева Н.П., Варкентин А.И. Оценка запасов и прогнозирование ОДУ восточно-камчатского минтая (*Theragra chalcogramma*) на основе предосторожного подхода // Тр. ВНИРО. — 2014. — Т. 151. — С. 62–74.
- Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении : моногр. : пер. с англ. — М. : Связь, 1976. — 496 с.
- Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева : учеб. пособие. — М. : Университетская книга, Логос, 2006. — 640 с.
- Aanes S., Pennington M. On estimating the age composition of the commercial catch of North-east Arctic cod from a sample of clusters // ICES J. Mar. Sci. — 2003. — Vol. 60, Iss. 2. — P. 297–303. DOI: 10.1016/s1054-3139(03)00008-0.
- Aeberhard W.H., Flemming J.M., Nielsen A. Review of State-Space Models for Fisheries Science // Annual Review of Statistics and Its Application. — 2018. — Vol. 5, Iss. 1. — P. 215–235. DOI: 10.1146/annurev-statistics-031017-100427.
- Berg C.W., Nielsen A. Accounting for correlated observations in an age-based state-space stock assessment model // ICES J. Mar. Sci. — 2016. — Vol. 73, Iss. 7. — P. 1788–1797. DOI: 10.1093/icesjms/fsw046.

- Berg C.W., Nielsen A., Kristensen K.** Evaluation of alternative age-based method for estimating relative abundance from survey data in relation to assessment models // *Fish. Res.* — 2013. — Vol. 151. — P. 91–99. DOI: 10.1016/j.fishres.2013.10.005.
- Bull B., Francis R.I.C.C., Dunn A. et al.** CASAL (C++ algorithmic stock assessment laboratory): CASAL User Manual v2.30-2012/03/21 : NIWA Tech. Rep. 135. — Wellington, 2012. — 280 p.
- Cadigan N.G.** A state-space stock assessment model for northern cod, including under-reported catches and variable natural mortality rates // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 2016. — Vol. 73, № 2. — P. 296–308. DOI: 10.1139/cjfas-2015-0047.
- Deriso R.B., Quinn T.J., Neal P.R.** Catch-age analysis with auxiliary information // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 1985. — Vol. 42. — P. 815–824.
- Doubleday W.G.** A Least Squares Approach to analyzing catch at age data // *ICNAF, Res. Bull.* — 1976. — № 12. — P. 69–81.
- Fournier D. and Archibald C.P.** A general theory for analyzing catch at age data // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 1982. — Vol. 39. — P. 1195–1203.
- Fournier D.A., Hampton J., Sibert J.R.** MULTIFAN-CL: a length-based, age-structured model for fisheries stock assessment, with application to South Pacific albacore, *Thunnus alalunga* // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 1998. — Vol. 55, № 9. — P. 2105–2116.
- Fournier D.A., Skaug H.J., Ancheta J. et al.** AD Model Builder: using automatic differentiation for statistical inference of highly parameterized complex nonlinear models // *Optimization Methods and Software.* — 2012. — Vol. 27, № 2. — P. 233–249. DOI: 10.1080/10556788.2011.597854.
- Francis R.C.** Replacing the multinomial in stock assessment models: A first step // *Fish. Res.* — 2014. — Vol. 151. — P. 70–84. DOI: 10.1016/j.fishres.2013.12.015.
- Grewal M.S., Andrews A.P.** Kalman Filtering: Theory and Practice. — New Jersey : Prentice-Hall, 1993. — 401 p.
- Gudmundsson G.** Time series analysis of catch-at-age observations // *J. Royal Statist. Society: Ser. C (Applied Statistics).* — 1994. — Vol. 43, № 1. — P. 117–126. DOI: 10.2307/2986116.
- Gudmundsson G., Gunnlaugsson T.** Selection and estimation of sequential catch-at-age models // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 2012. — Vol. 69, № 11. — P. 1760–1772.
- Gulland J.A.** Manual of methods for fish assessment. Part. 1. Fish population analysis : FAO Man. Fish. Sci. — 1969. — № 4. — 154 p.
- Hilborn R., Maunder M.N., Parma A. et al.** Documentation for a general age-structured Bayesian stock assessment model: code named Coleraine. — Seattle, Washington : Fisheries Research Institute, University of Washington, 2000. (FRI/UW 00/01).
- Hrafnkelsson B., Stefánsson G.** A model for categorical length data from groundfish surveys // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 2004. — Vol. 61, № 7. — P. 1135–1142. DOI: 10.1139/f04-049.
- Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.** A new approach for filtering nonlinear systems // *Proc. of the “American Control Conference”.* — Seattle, 1995. — P. 1628–1632.
- Kristensen K., Nielsen A., Berg C.W. et al.** TMB: automatic differentiation and laplace approximation // *Journal of Statistical Software.* — 2016. — Vol. 70, Iss. 5. — P. 1–21. DOI: 10.18637/jss.v070.i05.
- Laurec A., Shepherd J.G.** On the analysis of catch and effort data // *J. Cons. Int. Explor. Mer.* — 1983. — Vol. 41. — P. 81–84.
- Maunder M.N., Punt A.E.** A review of integrated analysis in fisheries stock assessment // *Fish. Res.* — 2013. — Vol. 142. — P. 61–74. DOI: 10.1016/j.fishres.2012.07.025.
- McAllister M.K., Ianelli J.N.** Bayesian stock assessment using catch-age data and the sampling/importance resampling algorithm // *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* — 1997. — Vol. 54, № 2. — P. 284–300. DOI: 10.1139/f96-285.
- Methot R.D.** Synthesis model: an adaptable framework for analysis of diverse stock assessment data // *International North Pacific Fisheries commission.* — 1990. — Vol. 50. — P. 259–277.
- Methot R.D., Wetzel C.R.** Stock synthesis: a biological and statistical frame-work for fish stock assessment and fishery management // *Fish. Res.* — 2013. — Vol. 142. — P. 86–99.
- Nielsen A., Berg C.W.** Estimation of time-varying selectivity in stock assessments using state-space models // *Fish. Res.* — 2014. — Vol. 158. — P. 96–101.
- Nielsen A., Hintzen N.T., Mosegaard H. et al.** Multi-fleet state-space assessment model strengthens confidence in single-fleet SAM and provides fleet-specific forecast options // *ICES J. Mar. Sci.* — 2021. — Vol. 78, Iss. 6. — P. 2043–2052. DOI: 10.1093/icesjms/fsab078.
- Patterson K.R.** Technical reference for the Integrated Catch-at-Age Programmes, Version 1.2 : SOAFD Marine Laboratory. — Aberdeen, 1994. — 13 p.
- Perreault A.M.J., Wheeland L.J., Morgan M.J., Cadigan N.G.** A state-space stock assessment model for American plaice on the Grand Bank of Newfoundland // *J. Northw. Atl. Fish. Sci.* — 2020. — Vol. 51. — P. 45–104. DOI: 10.2960/J.v51.m727.

Pope J.G. An investigation of the accuracy of Virtual Population Analysis using cohort analysis // ICNAF Res. Bull. — 1972. — № 9. — P. 65–74.

Pope J.G., Shepherd J.G. A simple method for consistent interpretation of catch-at-age data // J. Cons. Int. Explor. Mer. — 1982. — Vol. 40. — P. 176–184.

Särkkä S. and Hartikainen J. On Gaussian Optimal Smoothing of Non-Linear State Space Models // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2010. — Vol. 55, № 8. — P. 1938–1941. DOI: 10.1109/TAC.2010.2050017.

Vasilyev D.A., Kizner Z.I. Instantaneous Separable VPA (ISVPA) // ICES J. Mar. Sci. — 1997. — Vol. 54, № 3. — P. 399–411.

References

Aoki, M., *Optimizatsiya stokhasticheskikh sistem* (Optimization of stochastic systems), Moscow: FIZMATLIT, 1971.

Varkentin, A.I., Malykh, K.M., and Ilyin, O.I., Some data on the selectivity of the fishery walleye pollock in mid-water trawls in the north-eastern part of the Sea of Okhotsk, pacific waters adjacent to Kamchatka and the northern Kuril Islands, *Vopr. Rybolov.*, 2021, vol. 22, no. 2, pp. 93–109. doi 10.36038/0234-2774-2021-22-2-93-109

Varkentin, A.I., Sergeeva, N.P., Ilyin O.I., and Ovsyannikov E.E., Walleye pollock (*Gadus chalcogrammus*, Pallas, 1814) fishery, size and age composition, state of stocks and catch prospects in the waters adjacent to Kamchatka peninsula and Northern Kuril Islands, *Issled. Vodn. Biol. Resur. Kamchatki Sev.-Zapadn. Chasti Tikhogo Okeana*, 2021, vol. 60, pp. 5–42. doi 10.15853/2072-8212.2021.60.5-42

Ilyin, O.I., Varkentin, A.I., and Smirnov, A.V., On one model approach to assessment of state for the stock of walleye pollock *Theragra chalcogramma* in the northern Okhotsk Sea, *Izv. Tikhookean. Nauchno-Issled. Inst. Rybn. Khoz. Okeanogr.*, 2016, vol. 186, pp. 107–117. doi 10.26428/1606-9919-2016-186-107-117

Ilyin, O.I., Sergeeva, N.P., and Varkentin, A.I., Estimation of reserves and forecasting of TAC of East Kamchatka pollock (*Theragra chalcogramma*) based on a precautionary approach, *Tr. Vses. Nauchno-Issled. Inst. Rybn. Khoz. Okeanogr.*, 2014, vol. 151, pp. 62–74.

Sage, E. and Mels, J., *Teoriya otsenki i yeye primeneniye v svyazi i upravlenii* (Theory of evaluation and its application in communication and management), Moscow: Svyaz', 1976.

Sinitsyn, I.N., *Fil'try Kalmana i Pugacheva* (Kalman and Pugachev Filters), Moscow: Universitetskaya kniga, Logos, 2006.

Aanes, S. and Pennington, M., On estimating the age composition of the commercial catch of Northeast Arctic cod from a sample of clusters, *ICES J. Mar. Sci.*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 297–303. doi 10.1016/s1054-3139(03)00008-0

Aeberhard, W.H., Flemming, J.M., and Nielsen, A., Review of State-Space Models for Fisheries Science, *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2018, vol. 5, no. 1, pp.215–235. doi 10.1146/annurev-statistics-031017-100427

Berg, C.W. and Nielsen, A., Accounting for correlated observations in an age-based state-space stock assessment model, *ICES J. Mar. Sci.*, 2016, vol. 73, no. 7, pp. 1788–1797. doi 10.1093/icesjms/fsw046

Berg, C.W., Nielsen, A., and Kristensen, K., Evaluation of alternative age-based method for estimating relative abundance from survey data in relation to assessment models, *Fish. Res.*, 2013, vol. 151, pp. 91–99. doi 10.1016/j.fishres.2013.10.005

Bull, B., Francis, R.I.C.C., Dunn, A., McKenzie, A., Gilbert, D.J., Smith, M.H., Bian, R., and Fu, D., CASAL (C++ algorithmic stock assessment laboratory): CASAL User Manual v2.30-2012/03/21, *NIWA Tech. Rep. 135*, Wellington, 2012.

Cadigan, N.G., A state-space stock assessment model for northern cod, including under-reported catches and variable natural mortality rates, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 2016, vol. 73, no. 2, pp. 296–308. doi 10.1139/cjfas-2015-0047

Deriso, R.B., Quinn, T.J., and Neal, P.R., Catch-age analysis with auxiliary information, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 1985, vol. 42, pp. 815–824.

Doubleday, W.G., A Least Squares Approach to analyzing catch at age data, *ICNAF, Res. Bull.*, 1976, no. 12, pp. 69–81.

Fournier, D. and Archibald, C.P., A general theory for analyzing catch at age data, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 1982, vol. 39, pp. 1195–1203.

Fournier, D.A., Hampton, J., and Sibert, J.R., MULTIFAN-CL: a length-based, age-structured model for fisheries stock assessment, with application to South Pacific albacore, *Thunnus alalunga*, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 1998, vol. 55, no. 9, pp. 2105–2116.

Fournier, D.A., Skaug, H.J., Ancheta, J., Sibert, J., Ianelli, J., Magnusson, A., Maunder, M.N., and Nielsen, A., AD Model Builder: using automatic differentiation for statistical inference of

highly parameterized complex nonlinear models, *Optimization Methods and Software*, 2012, vol. 27, no. 2, pp. 233–249. doi 10.1080/10556788.2011.597854

Francis, R.C., Replacing the multinomial in stock assessment models: A first step, *Fish. Res.*, 2014, vol. 151, pp. 70–84. doi 10.1016/j.fishres.2013.12.015

Grewal, M.S. and Andrews, A.P., Kalman Filtering: Theory and Practice, New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

Gudmundsson, G. Time series analysis of catch-at-age observations, *J. Royal Statist. Society: Ser. C (Applied Statistics)*, 1994, vol. 43, no. 1, pp. 117–126. doi 10.2307/2986116

Gudmundsson, G. and Gunnlaugsson, T., Selection and estimation of sequential catch-at-age models, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 2012, vol. 69, no. 11, pp. 1760–1772.

Gulland, J.A., Manual of methods for fish assessment. Part. 1. Fish population analysis, *FAO Man. Fish. Sci.*, 1969, no. 4.

Hilborn, R., Maunder, M.N., Parma, A., Ernst, B., Paynes, J., and Starr, P.J., *Documentation for a general age-structured Bayesian stock assessment model: code named Coleraine*, Seattle, Washington: Fisheries Research Institute, University of Washington, 2000. (FRI/UW 00/01).

Hrafnkelsson, B. and Stefánsson, G., A model for categorical length data from groundfish surveys, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 2004, vol. 61, no. 7, pp. 1135–1142. doi 10.1139/f04-049

Julier, S.J., Uhlmann, J.K., and Durrant-Whyte, H., A new approach for filtering nonlinear systems, in *Proc. of the “American Control Conference”*, Seattle, 1995, pp. 1628–1632.

Kristensen, K., Nielsen, A., Berg, C.W., Skaug, H., and Bell, B.M., TMB: automatic differentiation and laplace approximation, *Journal of Statistical Software*, 2016, vol. 70, no. 5, pp. 1–21. doi 10.18637/jss.v070.i05

Laurec, A. and Shepherd, J.G., On the analysis of catch and effort data, *J. Cons. Int. Explor. Mer.*, 1983, vol. 41, pp. 81–84.

Maunder, M.N. and Punt A.E., A review of integrated analysis in fisheries stock assessment, *Fish. Res.*, 2013, vol. 142, pp. 61–4. doi 10.1016/j.fishres.2012.07.025

McAllister, M.K. and Ianelli, J.N., Bayesian stock assessment using catch-age data and the sampling/importance resampling algorithm, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, 1997, vol. 54, no. 2, pp. 284–300. doi 10.1139/f96-285

Methot, R.D., Synthesis model: an adaptable framework for analysis of diverse stock assessment data, *International North Pacific Fisheries commission*, 1990, vol. 50, pp. 259–277.

Methot, R.D. and Wetzel, C.R., Stock synthesis: a biological and statistical frame-work for fish stock assessment and fishery management, *Fish. Res.*, 2013, vol. 142, pp. 86–99.

Nielsen, A. and Berg, C.W., Estimation of time-varying selectivity in stock assessments using state-space models, *Fish. Res.*, 2014, vol. 158, pp. 96–101.

Nielsen, A., Hintzen, N.T., Mosegaard, H., Trijoulet, V., and Berg, C.W., Multi-fleet state-space assessment model strengthens confidence in single-fleet SAM and provides fleet-specific forecast options, *ICES J. Mar. Sci.*, 2021, vol. 78, no. 6, pp. 2043–2052. doi 10.1093/icesjms/fsab078

Patterson, K.R., Technical reference for the Integrated Catch-at-Age Programmes, Version 1.2, *SOAFD Marine Laboratory*, Aberdeen, 1994.

Perreault, A.M.J., Wheeland, L.J., Morgan, M.J., and Cadigan, N.G., A state-space stock assessment model for American plaice on the Grand Bank of Newfoundlan, *J. Northw. Atl. Fish. Sci.*, 2020, vol. 51, pp. 45–104. doi 10.2960/J.v51.m727

Pope, J.G., An investigation of the accuracy of Virtual Population Analysis using cohort analysis, *ICNAF Res. Bull.*, 1972, no. 9, pp. 65–74.

Pope, J.G. and Shepherd, J.G., A simple method for consistent interpretation of catch-at-age data, *J. Cons. Int. Explor. Mer.*, 1982, vol. 40, pp. 176–184.

Särkkä, S. and Hartikainen, J., On Gaussian Optimal Smoothing of Non-Linear State Space Models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, vol. 55, no. 8, pp. 1938–1941. doi 10.1109/TAC.2010.2050017

Vasilyev, D.A. and Kizner, Z.I., Instantaneous Separable VPA (ISVPA), *ICES J. Mar. Sci.*, 1997, vol. 54, no. 3, pp. 399–411.

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 1.09.2022 г.

The article was submitted 13.05.2022; approved after reviewing 26.07.2022;
accepted for publication 1.09.2022